Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 849997 22 maggio 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	d
3	a
4	a
5	b
6	c
7	c
8	c
9	c
10	d
11	b
12	c

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x|x|)}{1-\cos x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

(a) è derivabile

► (b) è derivabile a destra ma non a sinistra

(c) ha un punto angoloso

(d) è continua a sinistra ma non a destra

Soluzione:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x|x|)}{1-\cos x} & \text{se } x\neq 0\\ 2 \quad \text{se} & x=0.\end{cases}$$

Consideriamo prima $x>0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{1-\cos x}=\dfrac{x^2+o(x^4)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}=$

$=\dfrac{x^2(1+o(x^2))}{\frac{x^2}{2}+o(x^3)}=\dfrac{1+o(x^2)}{\frac{1}{2}+o(x)}\longrightarrow 2$ per $x\to 0^+$, quindi

f è continua a destra in $x=0$.

Osserviamo ora che, se $x<0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sin(-x^2)}{1-\cos x}=-f(-x)$

quindi $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-2\neq f(0)$ e f non è continua a sinistra in $x=0$. Questo basta a escludere tutte le risposte tranne una, verifichiamo comunque la derivabilità a destra.

Se $x>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1+o(x^2)}{\frac{1}{2}+o(x)}-2\right)=\dfrac{1}{x}\,\dfrac{\cancel{1}+o(x^2)-\cancel{1}+o(x)}{\frac{1}{2}+o(x)}$

$=\dfrac{o(x)}{x\left(\frac{1}{2}+o(x)\right)}=\dfrac{o(1)}{\frac{1}{2}+o(x)}\longrightarrow 0$ quindi $f'_+(0)=0$.

2. La funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^4\cos(x^2)$

(a) è bigettiva

(b) è iniettiva ma non surgettiva

(c) non è né iniettiva né surgettiva

► (d) è surgettiva ma non iniettiva

Soluzione:

$f(x) = x^4 \cos(x^2) \qquad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$

Consideriamo la successione $a_n = \sqrt{2n\pi}$. Risulta che

$f(a_n) = (2n\pi)^2 \cos(2n\pi) = (2n\pi)^2 \longrightarrow +\infty$ se $n \to \infty$, quindi

$\sup(f) = +\infty$.

Prendiamo ora $b_n = \sqrt{\pi + 2n\pi}$. In questo caso avremo

$f(b_n) = (\pi + 2n\pi)^2 \cos(\pi + 2n\pi) = (\pi + 2n\pi)^2 (-1) \to -\infty$ se $n \to \infty$, quindi

$\inf(f) = -\infty$.

Dato che f è continua, dal teorema dei valori intermedi, f è surgettiva.

Osserviamo ora che f è pari, infatti

$f(-x) = (-x)^4 \cos((-x)^2) = f(x)$

quindi f non è iniettiva.

3. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^{\arctan(x^2)} e^{|t|}\, dt$

► (a) è limitata (b) è iniettiva (c) è debolmente monotòna (d) ha un punto angoloso

Soluzione:

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{arctg}(x^2)} e^{|t|}\, dt$$

Osserviamo che $\operatorname{arctg}(x^2) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e che $e^{|t|} > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$,

quindi $F(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre, dato che $\operatorname{arctg}(x^2) < \frac{\pi}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}$,

$F(x) \leq \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{|t|}\, dt = M$ valore finito. $(M = e^{\pi/2} - 1)$

Quindi F è limitata.

4. $\displaystyle\int_{e^2}^{e^e} \frac{dx}{x\log x(\log\log x)^2} =$

► (a) $\frac{1}{\log 2} - 1$ (b) $\frac{1}{e^{1+e}} - \frac{e^{-2}}{2(\log 2)^2}$ (c) $e^2 - 4$ (d) $\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^e}$

Soluzione:

$$\int \frac{dx}{x\log x(\log\log x)^2}$$ sostituzione $\log\log x = t$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x\log x} \qquad dt = \frac{dx}{x\log x}$$ e otteniamo

$$\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\log\log x} + c$$

$$\int_{e^2}^{e^e} \frac{dx}{x\log x(\log\log x)^2} = \left[-\frac{1}{\log\log x}\right]_{e^2}^{e^e} = -\frac{1}{\log\log(e^e)} + \frac{1}{\log\log(e^2)} =$$

$$= -\frac{1}{\log e} + \frac{1}{\log 2} = -1 + \frac{1}{\log 2}.$$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{x^2}\,dx$

(a) non esiste ► (b) diverge positivamente (c) diverge negativamente (d) converge

Soluzione:

Poniamo $f(x)=\dfrac{e^{\sin x}-\cos x}{x^2}$. Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x=1$ e consideriamo prima $\int_0^1 f(x)dx$.

Per $x\to 0$ $f(x)=\dfrac{e^{x+o(x^2)}-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}{x^2}=$

$$=\frac{\cancel{1}+x+o(x^2)+o(x+o(x^2))-\cancel{1}+\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{x^2}=\frac{x+o(x)}{x^2}=\frac{x(1+o(1))}{x^2}=\frac{1+o(1)}{x}$$

Otteniamo quindi che $f(x)>0$ in un intorno destro di 0.

Scegliendo $g(x)=\frac{1}{x}$, abbiamo che $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, quindi, dal criterio del confronto asintotico $\int_0^1 f(x)dx=+\infty$.

Se $x\geq 1$ la funzione f potrebbe assumere anche valori negativi.

Consideriamo la convergenza assoluta.

$$|f(x)|\leq\frac{|e^{\sin x}|+|\cos x|}{x^2}\leq\frac{e+1}{x^2}$$

Dato che $\int_1^{+\infty}\frac{e+1}{x^2}dx$ converge, dal criterio del confronto, $\int_1^{+\infty}|f(x)|dx$ converge, quindi anche $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ converge.

Riunendo i risultati sui due intervalli di integrazione otteniamo

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=+\infty.$$

6. Sia $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^3}$, $\quad x\neq 0$. Allora

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty}f(x)\,dx$ non esiste (b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge ▶ (c) $\displaystyle\int_3^{+\infty}f(x)\,dx$ converge (d) $\displaystyle\int_4^7 f(x)\,dx$ non converge

Soluzione:

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^3}.$$

Dato che $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$, $\int_3^{+\infty} |f(x)|dx$ converge per il criterio del confronto. Dal criterio dell'assoluta convergenza segue che $\int_3^{+\infty} f(x)dx$ converge.

7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\frac{n^2+1}{n}} + n^7}{3^{n-1} + \log n} =$

(a) $\frac{1}{e^3}$ (b) e^2 ► (c) 0 (d) $+\infty$

Soluzione:

$$\frac{2^{\frac{n^2+1}{n}} + n^7}{3^{n-1} + \log n} = \frac{2^{n+\frac{1}{n}} + n^7}{\frac{1}{3}\cdot 3^n + \log n} = \frac{2^n\left(2^{1/n} + \frac{n^7}{2^n}\right)}{3^n\left(\frac{1}{3} + \frac{\log n}{3^n}\right)} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{2^{1/n} + \frac{n^7}{2^n}}{\frac{1}{3} + \frac{\log n}{3^n}} \longrightarrow 0 \cdot \frac{2^0 + 0}{\frac{1}{3} + 0} = 0$$

8. $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\log n}} =$

(a) $+\infty$ (b) 0 ► (c) $\frac{1}{e^2}$ (d) $\log 2$

Soluzione:

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\log n}} = e^{\frac{1}{\log n}\log\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{\log n}\log\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)} = e^{\frac{1}{\log n}\log\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{\log n}\log\left(\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)} = e^{\frac{1}{\log n}\left(\log\frac{1}{n^2}+\log\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{\log n}\left(-2\log n+\log\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right)} = e^{-2\left(1+\frac{\log\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{\log n}\right)} \to e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n}$

(a) diverge positivamente

(b) converge assolutamente

► (c) converge ma non converge assolutamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n}$$

Osserviamo che $\dfrac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n} = \dfrac{(-1)^n}{\sin(n^2)-4n} = -\dfrac{(-1)^n}{4n-\sin(n^2)}$.

Poniamo $a_n = \dfrac{1}{4n-\sin(n^2)}$ e osserviamo che $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$

e che $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{+\infty + \text{limitata}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Mostriamo ora che (a_n) è decrescente.

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{1}{4(n+1)-\sin((n+1)^2)} \leq \frac{1}{4n-\sin(n^2)}$$

$$\iff \cancel{4n} - \sin(n^2) \leq \cancel{4n}+4 - \sin((n+1)^2) \iff \sin((n+1)^2) - \sin(n^2) \leq 4$$

che è sempre vera perché $\sin((n+1)^2) - \sin(n^2) \leq 2$.

Dal criterio di Leibniz la serie data $\sum_n \dfrac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n} = -\sum_n (-1)^n a_n$

converge.

Per la convergenza assoluta, scegliamo $b_n = \dfrac{1}{n}$ e osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n}\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n-\sin(n^2)} = \frac{1}{4}.$$ Dato che $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$,

dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che la serie non converge assolutamente.

10. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2(1+\log n)}$

(a) è indeterminata

(b) diverge a $-\infty$

(c) diverge a $+\infty$

► (d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2(1+\log n)}$$

Poniamo $a_n = \dfrac{\cos n}{n^2(1+\log n)}$ e osserviamo che (a_n) è a segno variabile.

Vediamo se la serie converge assolutamente.

$$|a_n| = \frac{|\cos n|}{n^2(1+\log n)} \leq \frac{1}{n^2(1+\log n)} \leq \frac{1}{n^2 \log n}$$

La serie $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2 \log n}$ è del tipo $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ che

converge perché $\alpha = 2 > 1$. Per il criterio del confronto converge

quindi anche $\sum |a_n|$, quindi la serie data converge assolutamente.

11. Sia $f(x,y) = y \sin x$. In quali dei seguenti insiemi non si annulla mai il gradiente di f?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

► (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$

Soluzione:

$f(x,y) = y \sin x$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y \cos x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin x$.

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y\cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ Dalla seconda equazione otteniamo $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella prima otteniamo

$y\cos(n\pi) = 0 \iff y(-1)^n = 0 \iff y = 0$. Quindi i punti dove si annulla il gradiente sono tutti e soli i punti $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ che sono tutti sull'asse x.

È immediato verificare che l'unico insieme che non contiene tali punti è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$.

12. Data $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ e $v = (1,1)$, la derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ vale

(a) 1

(b) non esiste

► (c) $\dfrac{1}{2}$

(d) 0

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad v = (1,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0)+hv) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,h) - f(0,0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^3}{h^2+h^2} - 0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{2h^3} = \frac{1}{2}$$

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 208810 22 maggio 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	d
2	d
3	a
4	a
5	b
6	a
7	b
8	b
9	a
10	a
11	c
12	d

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x|x|)}{1-\cos x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

(a) ha un punto angoloso

(b) è continua a sinistra ma non a destra

(c) è derivabile

► (d) è derivabile a destra ma non a sinistra

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x|x|)}{1-\cos x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 \quad \text{se} & x = 0. \end{cases}$$

Consideriamo prima $x>0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{1-\cos x} = \dfrac{x^2 + o(x^4)}{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))} =$

$= \dfrac{x^2(1+o(x^2))}{\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = \dfrac{1+o(x^2)}{\frac{1}{2}+o(x)} \longrightarrow 2$ per $x \to 0^+$, quindi

f è continua a destra in $x=0$.

Osserviamo ora che, se $x<0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin(-x^2)}{1-\cos x} = -f(-x)$

quindi $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2 \neq f(0)$ e f non è continua a

sinistra in $x=0$. Questo basta a escludere tutte le

risposte tranne una, verifichiamo comunque la derivabilità a destra.

Se $x>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1+o(x^2)}{\frac{1}{2}+o(x)} - 2\right) = \dfrac{1}{x} \dfrac{\cancel{1}+o(x^2)-\cancel{1}+o(x)}{\frac{1}{2}+o(x)}$

$= \dfrac{o(x)}{x\left(\frac{1}{2}+o(x)\right)} = \dfrac{o(1)}{\frac{1}{2}+o(x)} \longrightarrow 0$ quindi $f'_+(0) = 0$.

2. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x^4+1}{e^x+x^2}$

(a) ha massimo ma non ha minimo

(b) ha sia massimo che minimo

(c) ha minimo ma non ha massimo

► (d) non ha né massimo né minimo

Soluzione:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4+1}{e^x + x^2}$.

f è continua in tutto il suo dominio.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{e^x\left(1+\frac{x^2}{e^x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{x^2}{e^x}} = 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{x^2\left(\frac{e^x}{x^2}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty} x^2 \frac{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{e^x}{x^2}+1} = +\infty \frac{(1+0)}{\frac{0}{+\infty}+1} = +\infty .$$

Dal secondo limite otteniamo che f non ha massimo.

Dal teorema di Weierstrass generalizzato, f ha minimo se e solo se $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) \leq 0$ ma questo non è possibile perchè $x^4+1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Quindi f non ha neanche minimo.

3. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^{\arctan(x^2)} e^{|t|}\, dt$

► (a) è limitata (b) è debolmente monotòna (c) è iniettiva (d) ha un punto angoloso

Soluzione:

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{arctg}(x^2)} e^{|t|}\, dt$$

Osserviamo che $\operatorname{arctg}(x^2) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e che $e^{|t|} > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, quindi $F(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre, dato che $\operatorname{artg}(x^2) < \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) \leq \int_0^{\pi/2} e^{|t|}\, dt = M$$ valore finito. $(M = e^{\pi/2} - 1)$

Quindi F è limitata.

4. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x e^{|x|}\, dx =$

► (a) e^2 (b) $e^2 + \dfrac{1}{e^2}$ (c) $2e^2 + \dfrac{1}{2e}$ (d) $2e^2 - \dfrac{e}{2}$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{x^2}\, dx$

(a) non esiste ► (b) diverge positivamente (c) converge (d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{e^{\sin x} - \cos x}{x^2}$. Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x=1$ e consideriamo prima $\int_0^1 f(x)dx$.

Per $x \to 0$ $f(x) = \dfrac{e^{x+o(x^2)} - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))}{x^2} =$

$$= \frac{\cancel{1} + x + o(x^2) + o(x+o(x^2)) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2} = \frac{x+o(x)}{x^2} = \frac{x(1+o(1))}{x^2} = \frac{1+o(1)}{x}$$

Otteniamo quindi che $f(x) > 0$ in un intorno destro di 0.

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x}$, abbiamo che $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, quindi, dal criterio del confronto asintotico $\int_0^1 f(x)dx = +\infty$.

Se $x \geq 1$ la funzione f potrebbe assumere anche valori negativi. Consideriamo la convergenza assoluta.

$$|f(x)| \leq \frac{|e^{\sin x}| + |\cos x|}{x^2} \leq \frac{e+1}{x^2}$$

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{e+1}{x^2} dx$ converge, dal criterio del confronto, $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, quindi anche $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Riunendo i risultati sui due intervalli di integrazione otteniamo

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty.$$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{\sin x} dx$

► (a) diverge positivamente (b) diverge negativamente (c) non esiste (d) converge

Soluzione:

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{\sin x}\,dx \quad . \text{ Poniamo } f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

In $x=0$ la funzione non è definita ma

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sin x} = 1$, quindi f è limitata in un intorno di 0,

pertanto integrabile secondo Riemann (f è continua per $x \neq 0, \pi$).

Per $x \to \pi^-$ facciamo il cambiamento di variabile $t = \pi - x$

$$\Rightarrow \sin x = \sin(\pi - t) = \cancel{\sin\pi\cos(-t)} + \cos\pi\sin(-t) = \sin t = t + o(t)$$

dato che $t \to 0$ se $x \to \pi$

$$\Rightarrow \sin(x) = t + o(t) = \pi - x + o(\pi - x) \quad \text{per } x \to \pi$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\pi - x + o(\pi - x)} = \frac{\pi + o(1)}{(\pi - x)(1 + o(1))}$$

Scegliendo $g(x) = \dfrac{1}{\pi - x}$ abbiamo che

$\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pi$. Dato che $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi - x}\,dx = +\infty$

otteniamo che $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = +\infty$.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\frac{n^2+1}{n}} + n^7}{3^{n-1} + \log n} =$

(a) $\dfrac{1}{e^3}$ ► (b) 0 (c) e^2 (d) $+\infty$

Soluzione:

$$\frac{2^{\frac{n^2+1}{n}}+n^7}{3^{n-1}+\log n}=\frac{2^{n+\frac{1}{n}}+n^7}{\frac{1}{3}\cdot 3^n+\log n}=\frac{2^n\left(2^{1/n}+\frac{n^7}{2^n}\right)}{3^n\left(\frac{1}{3}+\frac{\log n}{3^n}\right)}=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{2^{1/n}+\frac{n^7}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{\log n}{3^n}}\longrightarrow 0\cdot\frac{2^0+0}{\frac{1}{3}+0}=0$$

8. La successione $a_n = (n^2 + \cos n)\sin\dfrac{1}{n^2}$

(a) non ha limite e non è limitata

► (b) ha limite finito

(c) è limitata inferiormente ma non superiormente

(d) non ha limite ma è limitata

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n}$

► (a) converge ma non converge assolutamente

(b) converge assolutamente

(c) diverge negativamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n}$$

Osserviamo che $\dfrac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n} = \dfrac{(-1)^n}{\sin(n^2)-4n} = -\dfrac{(-1)^n}{4n-\sin(n^2)}$.

Poniamo $a_n = \dfrac{1}{4n-\sin(n^2)}$ e osserviamo che $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$

e che $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{+\infty + \text{limitata}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Mostriamo ora che (a_n) è decrescente.

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{1}{4(n+1)-\sin((n+1)^2)} \leq \frac{1}{4n-\sin(n^2)}$$

$$\iff \cancel{4n} - \sin(n^2) \leq \cancel{4n}+4 - \sin((n+1)^2) \iff \sin((n+1)^2) - \sin(n^2) \leq 4$$

che è sempre vera perché $\sin((n+1)^2) - \sin(n^2) \leq 2$.

Dal criterio di Leibniz la serie data $\sum_n \dfrac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n} = -\sum_n (-1)^n a_n$

converge.

Per la convergenza assoluta, scegliamo $b_n = \dfrac{1}{n}$ e osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n}\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n-\sin(n^2)} = \frac{1}{4}.$$ Dato che $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$,

dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che la serie non converge assolutamente.

10. La serie $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n+1}{2+\cos\left(\frac{n}{3}\right)}$

- ► (a) non converge
- (b) converge assolutamente
- (c) converge ma non converge assolutamente
- (d) diverge negativamente

11. Sia $f(x,y) = y\sin x$. In quali dei seguenti insiemi non si annulla mai il gradiente di f?

- (a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x > y\}$
- (b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}$
- ► (c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$
- (d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$

Soluzione:

$f(x,y) = y \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x$.

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y\cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ Dalla seconda equazione otteniamo $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella prima otteniamo

$y\cos(n\pi) = 0 \iff y(-1)^n = 0 \iff y = 0$. Quindi i punti dove si annulla il gradiente sono tutti e soli i punti $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ che sono tutti sull'asse x.

È immediato verificare che l'unico insieme che non contiene tali punti è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$.

12. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^6 + e^{|y-3|} - 1$

(a) ha sia massimo che minimo

(b) è limitata inferiormente ma non ha minimo

(c) non ha né massimo né minimo

► (d) ha minimo ma non ha massimo

Soluzione:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^6 + e^{|y-3|} - 1$.

Dato che $x^6 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $e^{|y-3|} \geq 1$ $\forall y \in \mathbb{R}$ risulta che $f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Osservando che $f(0,3) = 0^6 + e^{|3-3|} - 1 = 0$ otteniamo che f ha minimo.

Consideriamo ora la restrizione all'asse x

$f(x,0) = x^6 + e^3 - 1$.

Osserviamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$

quindi f non ha massimo.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 764170 22 maggio 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	a
3	c
4	d
5	d
6	a
7	a
8	d
9	d
10	a
11	d
12	b

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x|x|)}{1-\cos x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

► (a) è derivabile a destra ma non a sinistra

(b) è continua a sinistra ma non a destra

(c) è derivabile

(d) ha un punto angoloso

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x|x|)}{1-\cos x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Consideriamo prima $x>0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{1-\cos x} = \dfrac{x^2 + o(x^4)}{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))} =$

$= \dfrac{x^2(1+o(x^2))}{\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = \dfrac{1+o(x^2)}{\frac{1}{2}+o(x)} \to 2$ per $x \to 0^+$, quindi

f è continua a destra in $x=0$.

Osserviamo ora che, se $x<0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin(-x^2)}{1-\cos x} = -f(-x)$

quindi $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2 \neq f(0)$ e f non è continua a sinistra in $x=0$. Questo basta a escludere tutte le risposte tranne una, verifichiamo comunque la derivabilità a destra.

Se $x>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1+o(x^2)}{\frac{1}{2}+o(x)} - 2\right) = \dfrac{1}{x} \, \dfrac{\cancel{1}+o(x^2)-\cancel{1}+o(x)}{\frac{1}{2}+o(x)}$

$= \dfrac{o(x)}{x\left(\frac{1}{2}+o(x)\right)} = \dfrac{o(1)}{\frac{1}{2}+o(x)} \to 0$ quindi $f'_+(0) = 0$.

2. $\lim_{x\to 0} \log\left(\sin(x^2)\right) =$

► (a) $-\infty$ (b) 0 (c) non esiste (d) $+\infty$

3. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^{\arctan(x^2)} e^{|t|}\, dt$

(a) è debolmente monotòna (b) ha un punto angoloso ► (c) è limitata (d) è iniettiva

Soluzione:

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{arctg}(x^2)} e^{|t|}\, dt$$

Osserviamo che $\operatorname{arctg}(x^2) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e che $e^{|t|} > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, quindi $F(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre, dato che $\operatorname{arctg}(x^2) < \frac{\pi}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}$,

$F(x) \leq \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{|t|}\, dt = M$ valore finito. $(M = e^{\pi/2} - 1)$

Quindi F è limitata.

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ ► (d) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{x^2} \, dx$

(a) converge (b) diverge negativamente (c) non esiste ► (d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $f(x) = \dfrac{e^{\sin x} - \cos x}{x^2}$. Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x=1$ e consideriamo prima $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Per $x \to 0$ $\quad f(x) = \dfrac{e^{x+o(x^2)} - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))}{x^2} =$

$$= \frac{\cancel{1} + x + o(x^2) + o(x + o(x^2)) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2} = \frac{x + o(x)}{x^2} = \frac{x(1+o(1))}{x^2} = \frac{1+o(1)}{x}$$

Otteniamo quindi che $f(x) > 0$ in un intorno destro di 0.

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x}$, abbiamo che $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, quindi, dal criterio del confronto asintotico $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = +\infty$.

Se $x \geq 1$ la funzione f potrebbe assumere anche valori negativi.

Consideriamo la convergenza assoluta.

$$|f(x)| \leq \frac{|e^{\sin x}| + |\cos x|}{x^2} \leq \frac{e+1}{x^2}$$

Dato che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e+1}{x^2} dx$ converge, dal criterio del confronto,

$\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, quindi anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Riunendo i risultati sui due intervalli di integrazione otteniamo

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx$

► (a) esiste finito (b) vale $-\dfrac{\pi}{2}$ (c) non esiste (d) vale $+\infty$

Soluzione:

$$\int_{-\infty}^{0} \underbrace{e^{-x^2}}_{f}\,dx \qquad e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \text{ va a } \phi$$

molto rapidamente per $x \to -\infty$

e^{-x^2} è continua e positiva.

confronto asintotico con $g(x) = e^{x}$, $f(x) = e^{-x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{x}} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2-x} = e^{-\infty} = 0 \qquad -x^2-x \to -\infty$$

$$\Rightarrow f \ll g \qquad \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx \text{ converge} \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx \text{ converge.}$$

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\frac{n^2+1}{n}} + n^7}{3^{n-1} + \log n} =$

► (a) 0 (b) $\dfrac{1}{e^3}$ (c) $+\infty$ (d) e^2

Soluzione:

$$\frac{2^{\frac{n^2+1}{n}} + n^7}{3^{n-1} + \log n} = \frac{2^{n+\frac{1}{n}} + n^7}{\frac{1}{3}\cdot 3^n + \log n} = \frac{2^n\left(2^{1/n} + \frac{n^7}{2^n}\right)}{3^n\left(\frac{1}{3} + \frac{\log n}{3^n}\right)} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{2^{1/n} + \frac{n^7}{2^n}}{\frac{1}{3} + \frac{\log n}{3^n}} \longrightarrow 0 \cdot \frac{2^0 + 0}{\frac{1}{3} + 0} = 0$$

8. La successione $a_n = \left(5n - \dfrac{1}{n^2}\right)\log\left(1 - \dfrac{4}{n}\right)$ con $n \geq 5$

(a) è infinitesima

(b) diverge a $-\infty$

(c) non ha segno costante

► (d) è limitata inferiormente

Soluzione:

$$a_n = \left(5n - \frac{1}{n^2}\right)\log\left(1 - \frac{4}{n}\right) \qquad n \geq 5$$

per $n \to +\infty$

$$a_n = n\left(5 - \frac{1}{n^3}\right)\left(-\frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 5n\left(1 + o(1)\right)\left(-\frac{4}{n}\right)\left(1 + o(1)\right) =$$

$$= -20\left(1 + o(1)\right) \qquad \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = -20$$

quindi (a_n) è limitata, in particolare lo è inferiormente.

Il risultato è garantito dalla versione per le successioni del teorema di Weierstrass generalizzato.

9. La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2) - 4n}$

(a) diverge negativamente

(b) diverge positivamente

(c) converge assolutamente

► (d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n}$$

Osserviamo che $\dfrac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n} = \dfrac{(-1)^n}{\sin(n^2)-4n} = -\dfrac{(-1)^n}{4n-\sin(n^2)}$.

Poniamo $a_n = \dfrac{1}{4n-\sin(n^2)}$ e osserviamo che $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$

e che $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{+\infty + \text{limitata}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Mostriamo ora che (a_n) è decrescente.

$a_{n+1} \leq a_n \iff \dfrac{1}{4(n+1)-\sin((n+1)^2)} \leq \dfrac{1}{4n-\sin(n^2)}$

$\iff \cancel{4n} - \sin(n^2) \leq \cancel{4n}+4 - \sin((n+1)^2) \iff \sin((n+1)^2) - \sin(n^2) \leq 4$

che è sempre vera perché $\sin((n+1)^2) - \sin(n^2) \leq 2$.

Dal criterio di Leibniz la serie data $\sum_n \dfrac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n} = -\sum_n (-1)^n a_n$

converge.

Per la convergenza assoluta, scegliamo $b_n = \dfrac{1}{n}$ e osserviamo che

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\left|\frac{\cos(n\pi)}{\sin(n^2)-4n}\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{4n-\sin(n^2)} = \dfrac{1}{4}$. Dato che $\sum_n \dfrac{1}{n} = +\infty$,

dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che la

serie non converge assolutamente.

10. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\left(\arctan\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

► (a) diverge positivamente
(b) converge assolutamente
(c) diverge negativamente
(d) converge semplicemente ma non assolutamente

11. Sia $f(x,y) = y\sin x$. In quali dei seguenti insiemi non si annulla mai il gradiente di f?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$
(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$
► (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$

Soluzione:

$f(x,y) = y \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x$.

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ Dalla seconda equazione otteniamo $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella prima otteniamo

$y \cos(n\pi) = 0 \iff y(-1)^n = 0 \iff y = 0$. Quindi i punti dove si annulla il gradiente sono tutti e soli i punti $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ che sono tutti sull'asse x.

È immediato verificare che l'unico insieme che non contiene tali punti è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$.

12. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{\frac{3x^4+y^2}{x^2y}}$ sono

(a) una coppia di parabole e una retta

► (b) una coppia di parabole private di un punto

(c) una coppia di rette

(d) un solo punto

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	vecchio regolamento 22 maggio 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	a
3	a
4	b
5	c
6	b
7	b
8	c
9	d
10	b
11	a
12	b

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x|x|)}{1-\cos x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

(a) ha un punto angoloso

(b) è continua a sinistra ma non a destra

► (c) è derivabile a destra ma non a sinistra

(d) è derivabile

Soluzione:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x|x|)}{1-\cos x} & \text{se } x\neq 0\\ 2 \quad \text{se} & x=0.\end{cases}$$

Consideriamo prima $x>0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{1-\cos x}=\dfrac{x^2+o(x^4)}{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))}=$

$=\dfrac{x^2(1+o(x^2))}{\frac{x^2}{2}+o(x^3)}=\dfrac{1+o(x^2)}{\frac{1}{2}+o(x)}\longrightarrow 2$ per $x\to 0^+$, quindi

f è continua a destra in $x=0$.

Osserviamo ora che, se $x<0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sin(-x^2)}{1-\cos x}=-f(-x)$

quindi $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-2\neq f(0)$ e f non è continua a sinistra in $x=0$. Questo basta a escludere tutte le risposte tranne una, verifichiamo comunque la derivabilità a destra.

Se $x>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1+o(x^2)}{\frac{1}{2}+o(x)}-2\right)=\dfrac{1}{x}\,\dfrac{\cancel{1}+o(x^2)-\cancel{1}+o(x)}{\frac{1}{2}+o(x)}$

$=\dfrac{o(x)}{x\left(\frac{1}{2}+o(x)\right)}=\dfrac{o(1)}{\frac{1}{2}+o(x)}\longrightarrow 0$ quindi $f'_+(0)=0$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+8x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sin(x^{-\frac{1}{3}})}=$

► (a) $\dfrac{8}{3}$ (b) 0 (c) non esiste (d) $-\infty$

3. La funzione $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\dfrac{x-1}{x}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

► (a) ha massimo ma non ha minimo (b) è limitata
(c) ha un asintoto obliquo (d) è debolmente crescente

4. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^{\arctan(x^2)} e^{|t|}\, dt$

(a) ha un punto angoloso ▶ (b) è limitata (c) è iniettiva (d) è debolmente monotòna

Soluzione:

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{arctg}(x^2)} e^{|t|}\, dt$$

Osserviamo che $\operatorname{arctg}(x^2) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e che $e^{|t|} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, quindi $F(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre, dato che $\operatorname{arctg}(x^2) < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) \leq \int_0^{\pi/2} e^{|t|}\, dt = M \quad \text{valore finito.} \quad (M = e^{\pi/2} - 1)$$

Quindi F è limitata.

5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x(x+2)}\, dx =$

(a) $\frac{7}{5}$ (b) $\log 5 - \log 2$ ▶ (c) $\frac{5}{2}\log 2 - \frac{3}{2}\log 3$ (d) $3\log 2$

Soluzione:

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x(x+2)}\, dx$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ t.c. $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{x-1}{x(x+2)}$

$$\frac{A(x+2) + Bx}{x(x+2)} = \frac{x-1}{x(x+2)} \iff Ax + 2A + Bx = x - 1 \iff \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A = -1 \end{cases}$$

$A = -\frac{1}{2} \quad B = 1 - A = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Quindi

$$\int \frac{x-1}{x(x+2)}\, dx = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x}\, dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x+2}\, dx = -\frac{1}{2}\log|x| + \frac{3}{2}\log|x+2| + c$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x-1}{x(x+2)}\, dx = \frac{1}{2}\Big[-\log|x| + 3\log|x+2|\Big]_1^2 = \frac{1}{2}\left(-\log 2 + 3\log 4 + \cancel{\log 1} - 3\log 3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\log 2 + 6\log 2 - 3\log 3\right) = \frac{5}{2}\log 2 - \frac{3}{2}\log 3.$$

6. La funzione $F : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{4+t}$

(a) è sempre ≤ 0 ► (b) cambia segno (c) è sempre ≥ 0 (d) è debolmente monotona

7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\frac{n^2+1}{n}} + n^7}{3^{n-1} + \log n} =$

(a) $+\infty$ ► (b) 0 (c) e^2 (d) $\frac{1}{e^3}$

Soluzione:

$$\frac{2^{\frac{n^2+1}{n}} + n^7}{3^{n-1} + \log n} = \frac{2^{n+\frac{1}{n}} + n^7}{\frac{1}{3}\cdot 3^n + \log n} = \frac{2^n\left(2^{1/n} + \frac{n^7}{2^n}\right)}{3^n\left(\frac{1}{3} + \frac{\log n}{3^n}\right)} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{2^{1/n} + \frac{n^7}{2^n}}{\frac{1}{3} + \frac{\log n}{3^n}} \longrightarrow 0 \cdot \frac{2^0 + 0}{\frac{1}{3} + 0} = 0$$

8. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} =$

(a) 1 (b) $+\infty$ ► (c) $\frac{1}{e}$ (d) 0

Soluzione:

Osserviamo che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$. Poniamo $a_n = \frac{n!}{n^n}$ e utilizziamo il teorema che ci garantisce che se esiste $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ (valido se $a_n > 0$ definitivamente).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= e^{n\log\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{n\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)} =$$

$$= e^{-\frac{n}{n+1}(1+o(1))} \longrightarrow e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Quindi $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}$.

9. $\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right)(n^3 - e)$

(a) vale $+\infty$

(b) vale 0

(c) vale $-\infty$

► (d) è un numero reale diverso da 0

Soluzione:

$$a_n = \left(\left(\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2} \right)\left(n^3 - e\right) =$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2} \right) n^3 \left(1 + o(1)\right) =$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 - \frac{1}{n^2} \right) n^3 \left(1 + o(1)\right) =$$

$$= \left(\cancel{\frac{1}{n^2}} + \cancel{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \cancel{\frac{1}{n^2}} \right) n^3 \left(1 + o(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1 + o(1)\right) n^3 \left(1 + o(1)\right) = 1 + o(1)$$

quindi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1.$

10. Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 3y' - 10y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -8 \end{cases}$ allora $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) =$

(a) 0 ► (b) $+\infty$ (c) 2 (d) $-\infty$

11. Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3xy - 2x^3 \\ y(0) = \dfrac{35}{9}, \end{cases}$ allora $y(\sqrt{2}) =$

► (a) $\dfrac{16}{9} + \dfrac{31e^3}{9}$ (b) $\dfrac{12\sqrt{2}+8}{9} e^{-\frac{3}{\sqrt{2}}} + 3$ (c) $\dfrac{32}{9} + 3e^3$ (d) $\dfrac{32}{9}$

12. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^{-y} \log x \\ y(3) = \log 3 + \log\log 3. \end{cases}$ Allora $y(4) =$

(a) $9 \log 3$ ► (b) $\log(4 \log 4 - 1)$ (c) $\log\left(\dfrac{1}{4} + 9 \log 3\right)$ (d) $\log 4 + \log\log 4$